

제2주 조건부확률
hylee@silla.ac.kr

확률 및 통계 (2)

제 2절 조건부확률

[정의] 조건부확률

사상 B가 일어났다는 조건하에서 사상 A가 일어나는 조건부확률 (conditional probability) $P(A|B)$ 는

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

와 같이 정의한다.

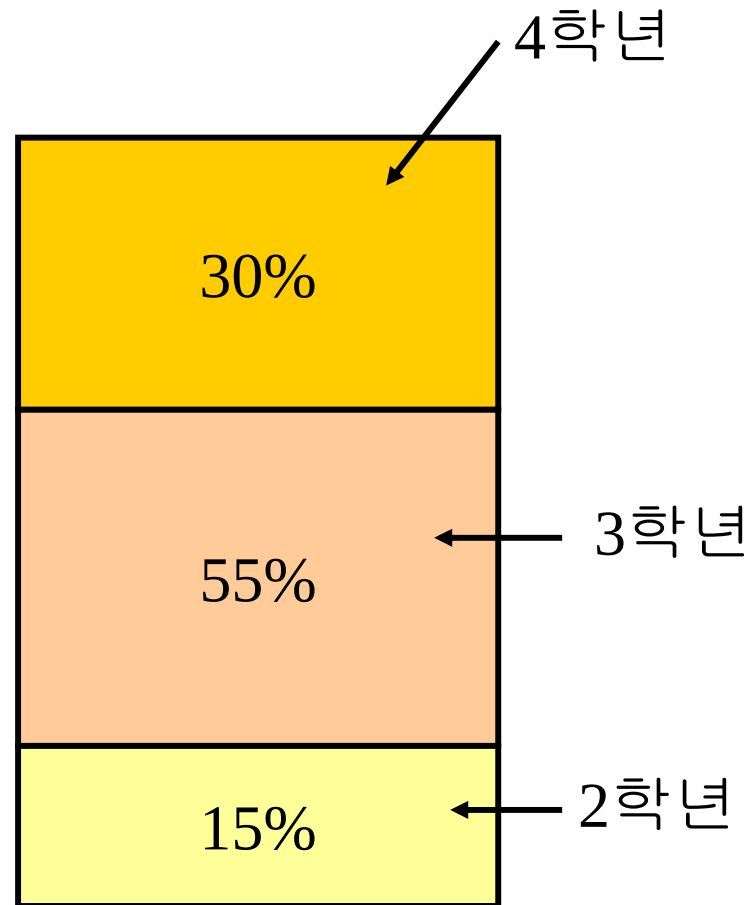
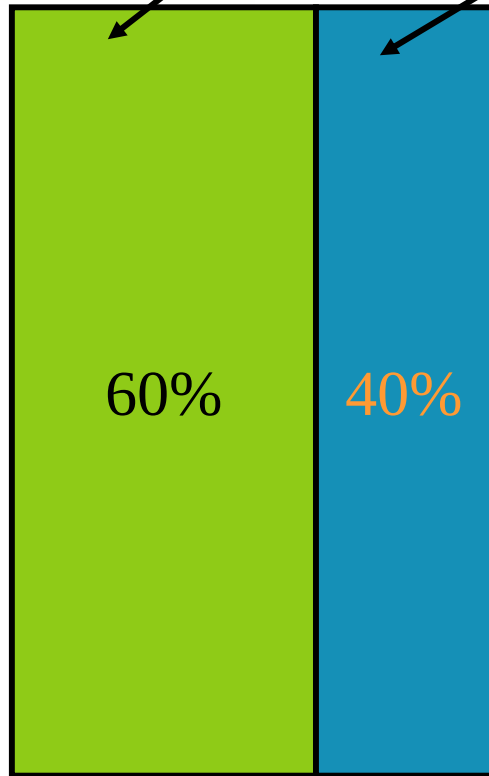
우리반 학생들의 비율

남여별

학년별

남학생

여학생

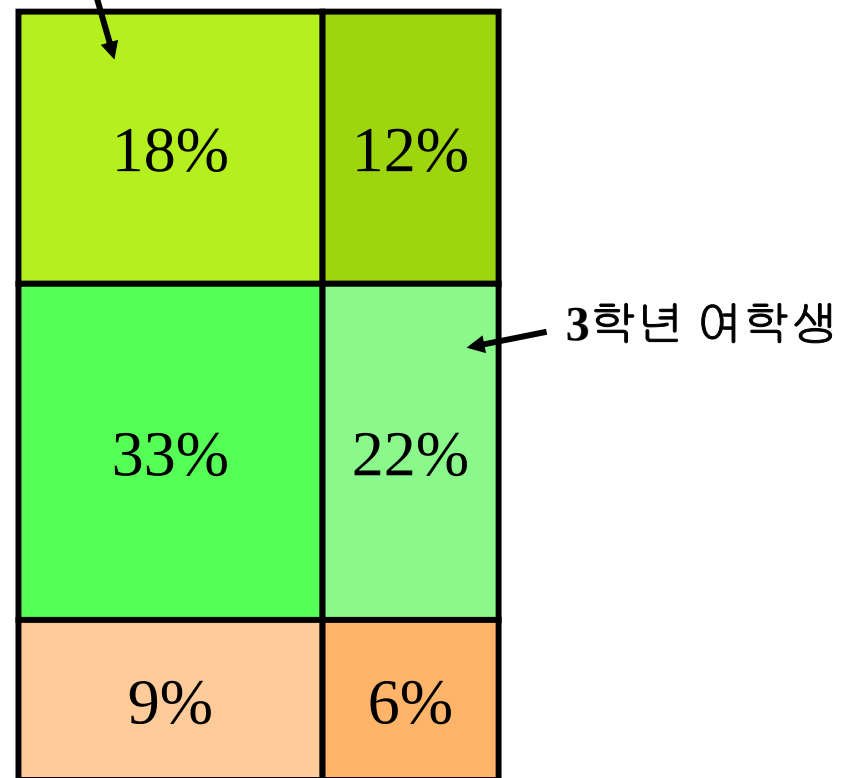
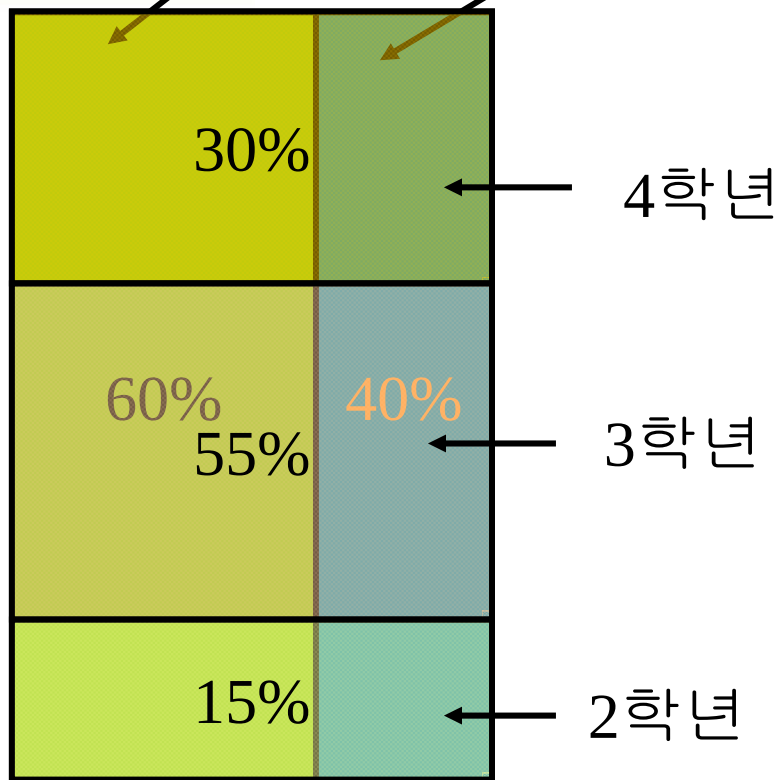


남여별 학년별

남학생

여학생

4학년 남학생



문제

한 학생이 여학생인 것이 알려졌을 때
그 학생이 3학년 학생일 확률은 얼마인가?

4학년 남학생

18%	12%
33%	22%
9%	6%

3학년 여학생

$$\frac{22}{12 + 22 + 6} = \boxed{\frac{22}{40}}$$

승법 정리 (MULTIPLICATION THEOREM)

[정리] 승법 정리(multiplication theorem)

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(B)P(A | B) \\ &= P(A)P(B | A)\end{aligned}$$

예 제 13

두 개의 주사위를 독립적으로 던지는 시행
에서 사상 $A=\{\text{눈의 합}=8\}$, $B=\{\text{눈이 같다}\}$
라 하자. 이 때, 조건부 확률

$$P(B|A)$$

를 구하시오.

[풀이]

$$3+5=8$$

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

이 고

$$A \cap B = \{(4,4)\}$$

이므로,



구하는 조건부 확률 $P(B|A)$ 는
다음과 같다.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$$

[정리] 곱셈공식

$(n+1)$ 개의 사상 $A_0, A_1, \dots, A_n$ 에 대하여

$P(A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ 이면

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$= P(A_0)P(A_1 | A_0)P(A_2 | A_0 \cap A_1)$$

$$\dots P(A_n | A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

이 성립한다.



3개의 사상 A_0, A_1, A_2 에 대하여

$P(A_0 \cap A_1 \cap A_2) > 0$ 이면

$$P(A_0 \cap A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_0)P(A_1 | A_0)P(A_2 | A_0 \cap A_1)$$

이 성립한다.



[증명]

$n = 1$ 일 때

$$P(A_0 \cap A_1) = P(A_0)P(A_1 | A_0)$$

이므로 식이 성립한다.

n 일 때 성립한다고 가정하고,
 $n+1$ 의 경우에 성립함을 보이자.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A)$$

$$P(\underbrace{A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n}_{\text{red}} \cap \underbrace{A_{n+1}}_{\text{green}})$$

$$= P(\underbrace{A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n}_{\text{red}})$$

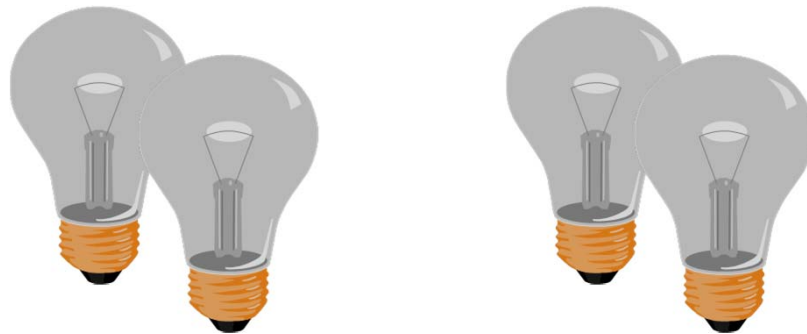
$$\times \underbrace{P(\underbrace{A_{n+1}}_{\text{green}} | \underbrace{A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n}_{\text{red}})}_{\text{pink box}}$$

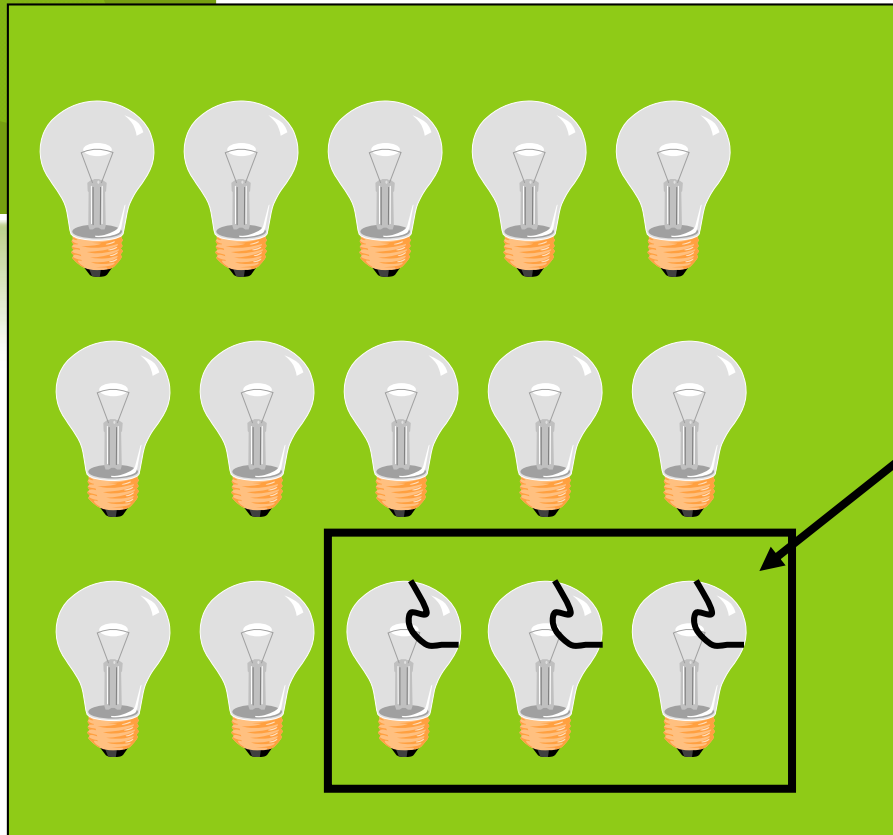
$$= P(A_0)P(A_1 | A_0) \cdots P(A_n | A_0 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

$$\times \underbrace{P(A_{n+1} | A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n)}_{\text{pink box}}$$

예제 17

15개의 전구 중에 불량품이 3개 있다. 전구를 한 개씩 검사하여 이 3개의 불량품을 모두 찾아내려고 할 때, 일곱 번째 검사에서 세 번째 마지막 불량전구가 발견될 확률을 구하시오.



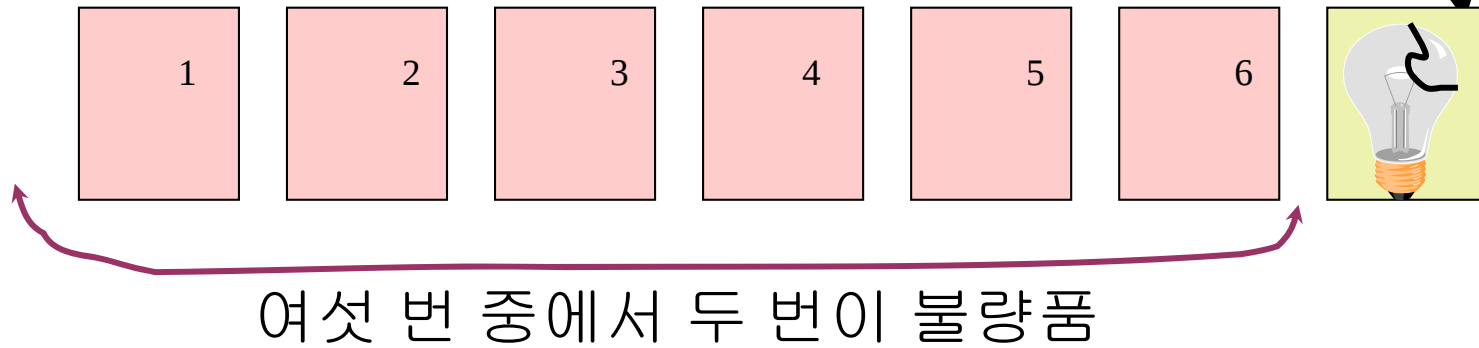


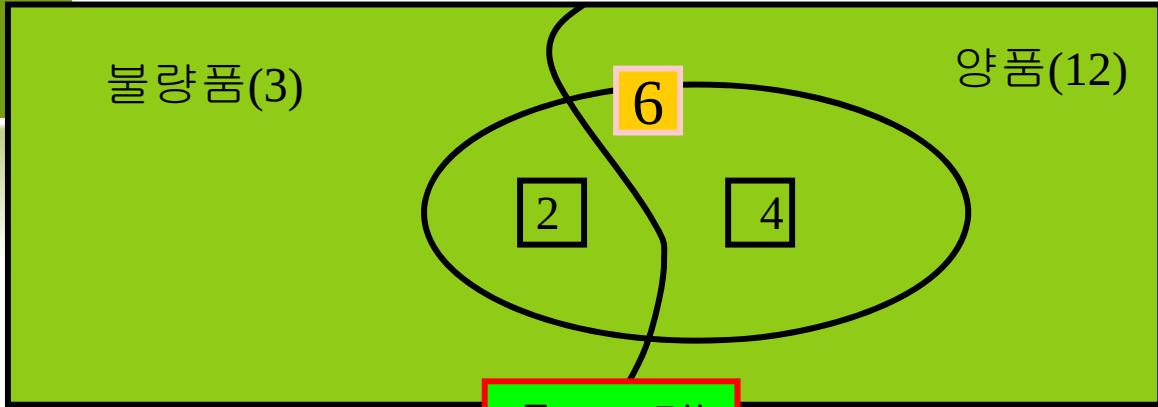
뽑은 전구는 복원
시키지 않는다.

불량품



일곱번째 = 불량품





총 15개

초기하분포

[풀이]

처음 여섯번째까지의 검사에서 2개의 불량품을
찾을 사상을 B , 일곱 번째의 검사에서 세 번째의
불량품을 찾을 사상을 A 로 나타내자. 그러면

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2} \binom{12}{4}}{\binom{15}{6}} = \frac{27}{91}$$

이고,

불량품

양품

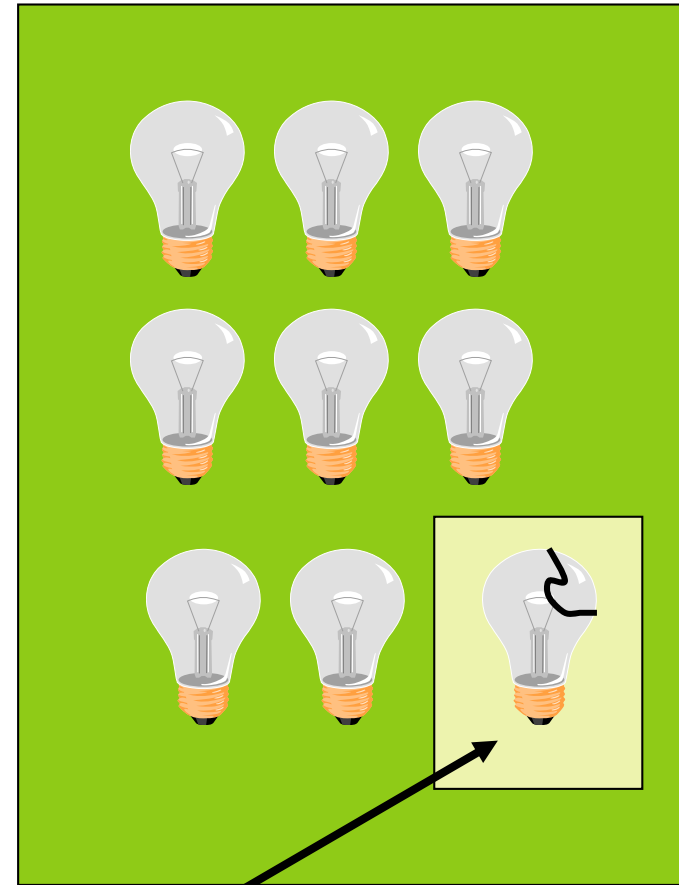
총개수



$P(A|B)$ 는 B 가 나타난 후에
일곱번째의 검사에서 세번째의
불량품을 얻을 확률이다.

만일 B 가
일어났다면
나머지 전구의
수는 9개이고,
그 중 불량품이
한 개가
있으므로

불량품





일곱번째 검사에서 남은
한 개의 불량품이
나올 확률은

$$P(A|B) = \frac{1}{9}$$