확률및통계(2)

제5주 이산확률분포모형

hylee@silla.ac.kr

제 5장 이산확률분포모형

이산확률분포모형
이산확률변수의 합의 분포

제 1절 이산 균일(균등)분포

[정의] 이산균일분포

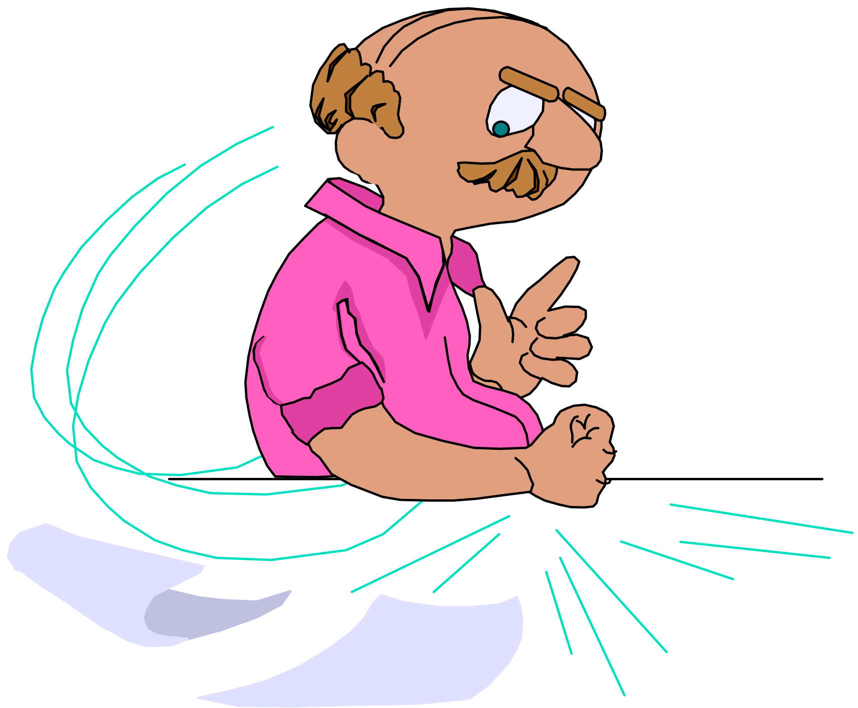
확률변수 X 가 똑같은 확률로서 n개의 서로다른 값을 갖는다면 X 의 확률분포는 다음과 같다.

$$P(X = x) = 1/n, \quad x = 1,2,\cdots,n$$

이 확률분포를 **이산균일분포** (discrete uniform distribution)라 한다.

예제 1

이산 균일분포가 확률함수임을 보이시오.



[풀이]

$$P(X=x)=\frac{1}{n}\geq 0,\ \ x=1,2,3,\cdots,n$$

이고

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

이다. 그러므로 이산균등분포는

확률함수이다.

제 2절 베르누이 분포

각 시행이 성공(S) 과 실패(F) 로 되어있는 시행을

독립 적으로 n회 실시한 시행 열을

베르누이 시행열 (Bernoulli Trials) 이라 한다.

[정의] 베르누이 분포

시행의 결과가 성공과 실패 두 가지 경우만 일어나는 시행에서 확률변수 X 를 성공의 횟수 (만일 결과가 성공이면 X = 1 이라하고 결과가 실패일 때 X = 0 이라한다 .) 라 하면 X의 확률분포는 다음과 같다.

$$P(X = x) = p^{x}(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

이 확률분포를 **베르누이분포** (Bernoulli distributi on) 라 하고, $B(1,p)$로 쓴다.

예제 3

베르누이 분포가 확률함수임을 보이시오.

[풀이]

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}\geq 0,\ \ x=0,1$$

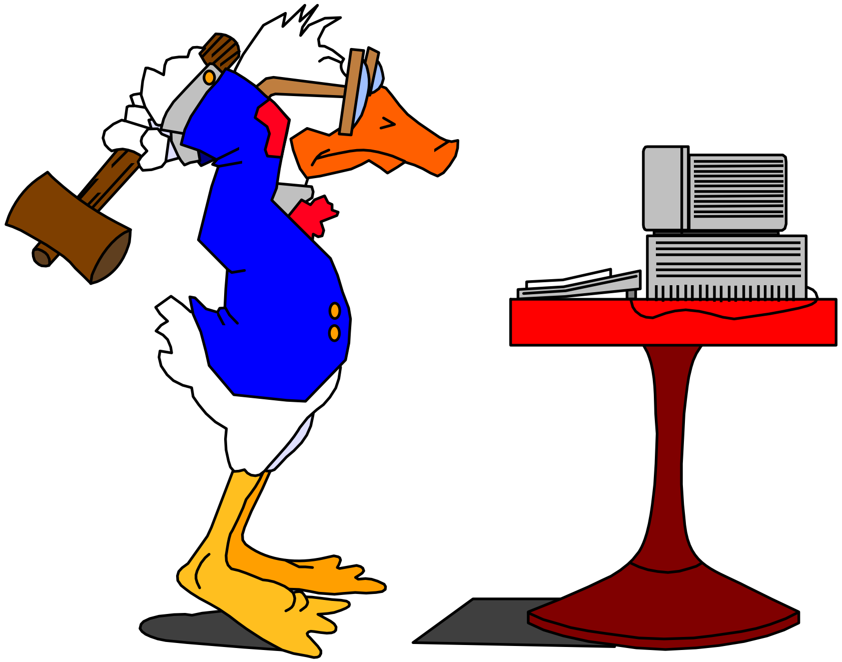
이고,

$$\sum_{x=0}^{1} p^x(1-p)^{1-x} = p+(1-p)=1$$

이므로, 베르누이분포는 확률함수이다.

제 3절 이항분포

- 이항분포의 정의
- 이항분포의 내용



[정의] **이항분포**

확률변수 X가 독립인 n회 베르누이시행에서 성공 S가 일어나는 횟수라면, n회의 시행에서 S가 일어나는 경우의 수는 $\binom{n}{x}$ 가지이므로, $P(S) = p, P(F) = 1 - p$ 라 할 때

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{n-x}, \ x = 0, 1, \cdots, n$$

이다. 이것을 **이항분포** (binomial distribution) 라 하고, $B(n, p)$로 나타낸다.

예제 5

이항분포가 확률
함수임을 보이시
오

[풀이]

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}\geq 0,$$

$$x=0,1,2,\cdots,n$$

이고,

이항정리

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}=\{p+(1-p)\}^{n}$$

$$=1$$

이므로, 이항분포는 확률함수이다.

예제 6

1개의 동전을 4회 던져서 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X 로 나타낼 때, X의 확률분포 및 분포함수를 구하시오.

[풀이]

X 는 베르누이 시행을 4번 시행할 때의 성공의 횟수이므로 이항분포를 따른다.

즉, $X = B(4, \frac{1}{2})$ 이다. 따라서

$$P(X = x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

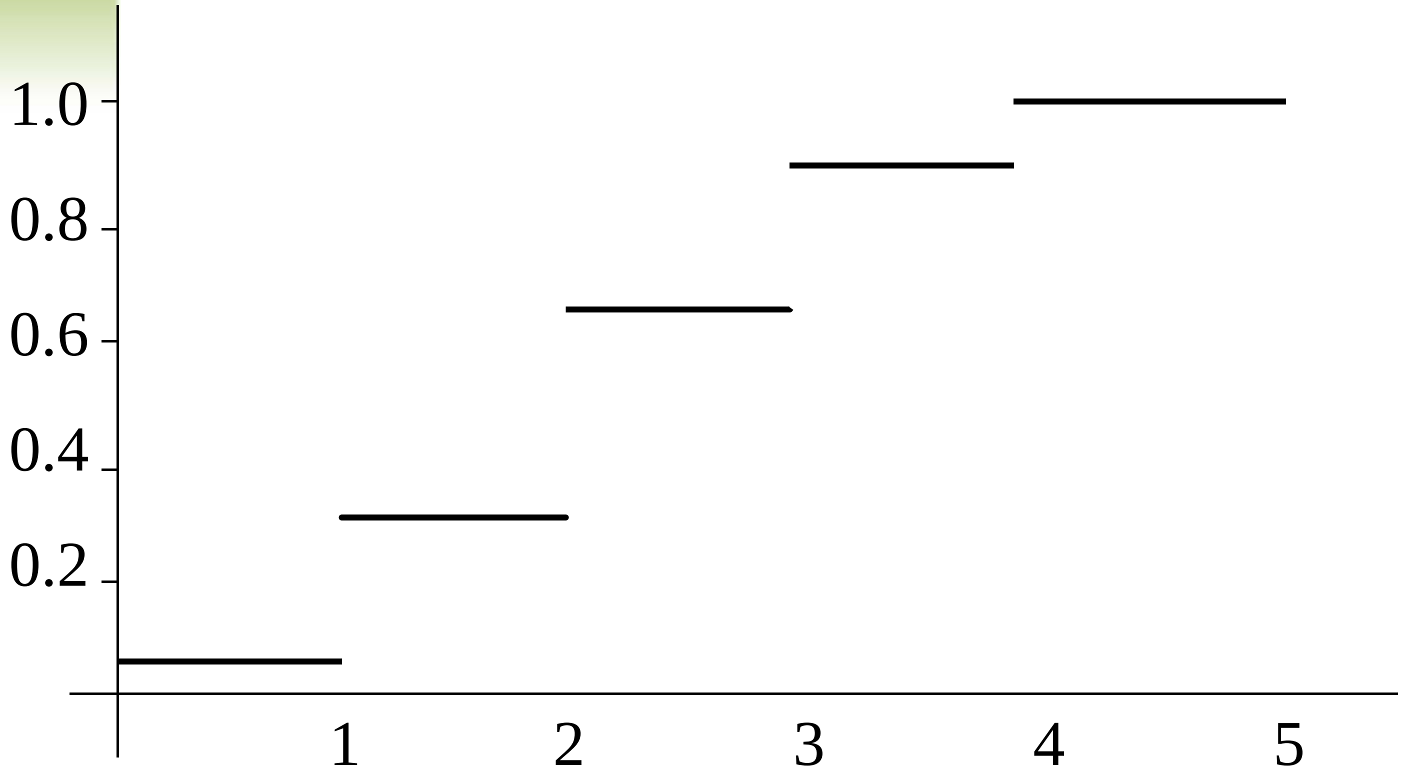
$$= \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}, \quad x = 0,1,2,3,4$$

이다.

분포함수를 구해보면

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ 1/16 & (0\le x<1) \\ 5/16 & (1\le x<2) \\ 11/16 & (2\le x<3) \\ 15/16 & (3\le x<4) \\ 1 & (4\le x) \end{cases}$$

그래프를 그려보면



각 선의 우측끝점은 비어있는 점이다.

제 4절 다항분포

- 이항분포의 확장인 다항분포를 정의
- 각 시행에서 결과가 정확히 k 가지일 때

[정의] 다항분포

사상 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 의어느 하나가 반드시 일어나고, 각각 일어날 확률이 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 인시행을 T 라 하자. T 를 독립적으로 n 회 시행했을때, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 등이 일어나는횟수$(X_1, X_2, \cdots, X_k)$는 k 개의 확률변수이고, 그 확률분포는

$$P\{(X_1, X_2, \cdots, X_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_k)\}$$

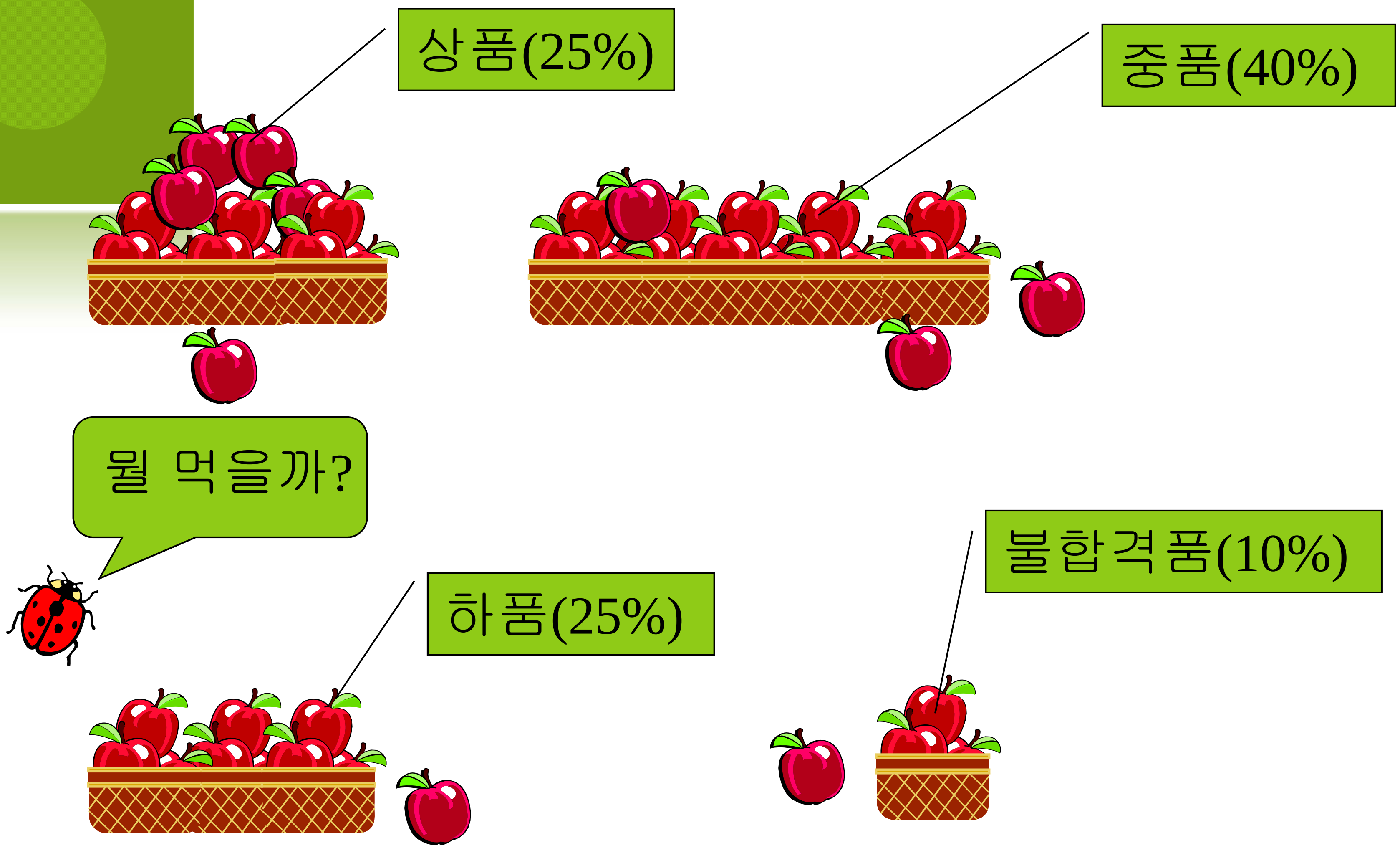
$$= \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

단, $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,\ p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$이다.

이확률분포를 **다항분포**(multinomial distribution)라한다.

예제 9

어떤 과일이 상, 중, 하, 불합격의 4종류로 분류된다. 상은 25%, 중은 40%, 하는 25%, 불합격은 10%의 비율이라 할 때, 임의로 20개를 취하는 경우, 상, 중, 하, 불합격품이 각각 5,8,4,3 개 포함될 확률을 구하시오.


상품(25%)
중품(40%)
뭘 먹을까?
하품(25%)
불합격품(10%)

[풀이]

$$p = \frac{20!}{5!\,8!\,4!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^8\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)^3$$