

제12주 확률변수의 함수의 기대값
hylee@silla.ac.kr

확률 및 통계 (2)

제3절 확률변수의 함수의 기대값

- ◎ 확률변수 X 의 함수 $g(X)$ 도 확률변수로서 확률분포를 갖는다.
- ◎ $Y=g(X)$ 의 분포와 기대값 등의 성질들을 학습한다.

[정의] 확률변수의 함수의 기대값

이산확률변수 X 의 확률함수가 $p(x)$ 라 하면
모든 실수값의 함수 $g(X)$ 에 대하여 기대값을
정의하면 다음과 같다.

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x)$$

또한, 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가
 $f(x)$ 라 하면, 모든 실수값 함수 $g(X)$ 에 대해
기대값을 정의하면 다음과 같다.

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

예제 18

X 의 확률함수가

$$P(X = 0) = 1/4, \quad P(X = 1) = 1/2$$

$$P(X = 2) = 1/4$$

일 때, $Y = X^2$ 의 기대값을 구해보시오.



[풀이]

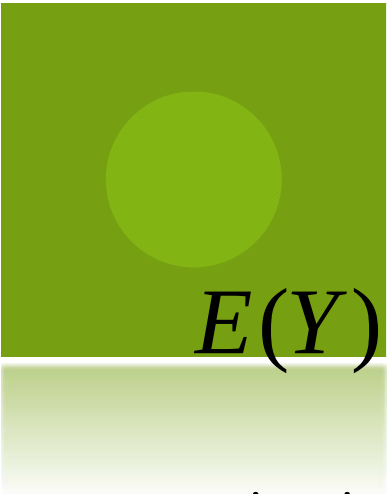
Y 의 확률분포는

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

로 주어진다. 따라서 Y 의 기대값 $E(Y)$ 는


$$E(Y) = E(X^2) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

이다. 여기서,

$$\frac{3}{2} = E(X^2) \neq [E(X)]^2 = 1$$

임을 유의할 것.



확률변수 X 의 기대값 $E(X)$ 를 X 의 평균(mean) 또는 1차적률(first moment)이라고도 한다. $E(X^n)$, $n \geq 1$ 을 X 의 n 차 적률(n^{th} moment)라 한다. 즉,

$$E(X^n) = \begin{cases} \sum_{x, p(x) > 0} x^n p(x), & X \text{가 이산일 때} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx, & X \text{가 연속일 때} \end{cases}$$

이다.

예제 19

X 가 구간 $(0,1)$ 에서 균등분포를 할 때,
 $E(e^X)$ 를 구하시오.



[풀이]

X 의 확률밀도함수가

$$f(x) = 1, \quad (0 < x < 1)$$

이므로, e^x 의 기대값을 구하면

$$E(e^x) = \int_0^1 e^x \cdot 1 dx = e - 1$$

[정리]

임의의 상수 a, b 에 대하여 다음이 성립한다.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

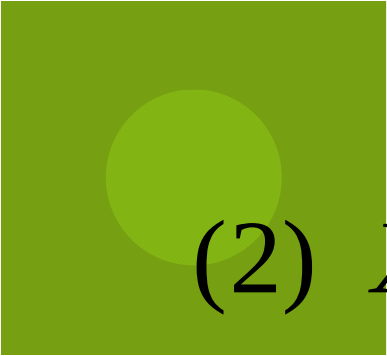


[증명]

이산형인 경우와 연속인 경우로 나누어
증명하자.

(1) X 가 이산형인 경우

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_x (ax + b)p(x) \\ &= a \sum_x xp(x) + b \sum_x p(x) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$



(2) X 가 연속형인 경우

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x) dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$= aE(X) + b$$

[정리]

X, Y 가 연속이고 독립일 때, X, Y 의
함수 $g(X), h(Y)$ 에 대하여

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(X)]$$

이 성립한다.

[증명]

$$\begin{aligned} E[g(X)h(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y) dy \\ &= E[g(X)]E[h(Y)] \end{aligned}$$

[정리]

X, Y 가 이산형 확률변수이고, g 가 X, Y 의 함수라고 하자. 이 때, X, Y 의 결합 확률함수가 $p(x, y)$ 이면, $g(X, Y)$ 의 기대값은 다음과 같다.

$$E[g(X, Y)] = \sum_y \sum_x g(x, y) p(x, y)$$

또한, 연속형 확률변수 X, Y 의 결합 밀도함수가 $f(x, y)$ 이면, $g(X, Y)$ 의 기대값은 다음과 같다.

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$



Ω

(X, Y)
 $f_{(X, Y)}(x, y)$

$\mathfrak{R}^2$

$g(x, y)$

$g(X, Y)$

$\mathfrak{R}$

윗 정리를 이용하면 $g(X, Y) = X + Y$
인 경우에

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\ &= E(X) + E(Y) \end{aligned}$$



일반적으로 $E(X_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이 유한
이면

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \end{aligned}$$

가 성립한다.

예제 20

주사위를 독립적으로 10회 던질 때, 나오는 눈의 합의 기대값을 구하시오.

[풀이]

i 번째 던진 주사위의 눈의 수를 X_i 라 하면

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

는 주사위를 열번 독립적으로 던졌을 때 눈의 합을 나타낸다. 여기서

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_{10}) = \frac{7}{2}$$

이므로

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_{10})$$

$$= 10\left(\frac{7}{2}\right) = 35$$

?