확률및통계(2)

제14주 적률생성함수(1)

hylee@silla.ac.kr

제 6장 적률생성함수

- 분포의 특성을 나타내는 적률과 적률생성함수를 정의한다.
- 각 확률모형의 적률생성함수를 구한다.
- 적률과 관계된 몇가지 정리

제 1절 적률

[정의] 적률

확률변수 X 의 원점에 대한 k 차적률

(*k*th moment) α_k 은 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha_k = E(X^k)$$

$$= \begin{cases} \sum_x x^k p(x) & (X \text{ 는이산형}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx & (X \text{ 는연속형}) \end{cases}$$

1차 적률이란?

- 기대값은 1차 적률을 말한다.

[정의] 평균에 대한 적률

확률변수 X의 평균 μ에 관한 k차 적률 μ_k 를 다음과같이 정의한다.

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k]$$

$$= \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^k p(x) & (X\text{는 이산형}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)dx & (X\text{는 연속형}) \end{cases}$$

평균 μ에대한 2차적률

$$\mu_2 = E[(X-\mu)^2]$$

는 X의 분산임을 알 수 있다.

제 2절 적률생성함수

- 적률생성함수의 정의
- 적률생성함수를 이용한 확률변수의 기대값과 분산을 구하시

[정의] 적률생성함수

확률변수 X 의 **적률생성함수(moment generating function)** $M_X(t)$ 는 다음과같이 정의한다. 이때, 적률생성함수를 약자로 $m.g.f.$ 로 나타내기도 한다.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} p_\mathrm{i} & (\text{이산형}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & (\text{연속형}) \end{cases}$$

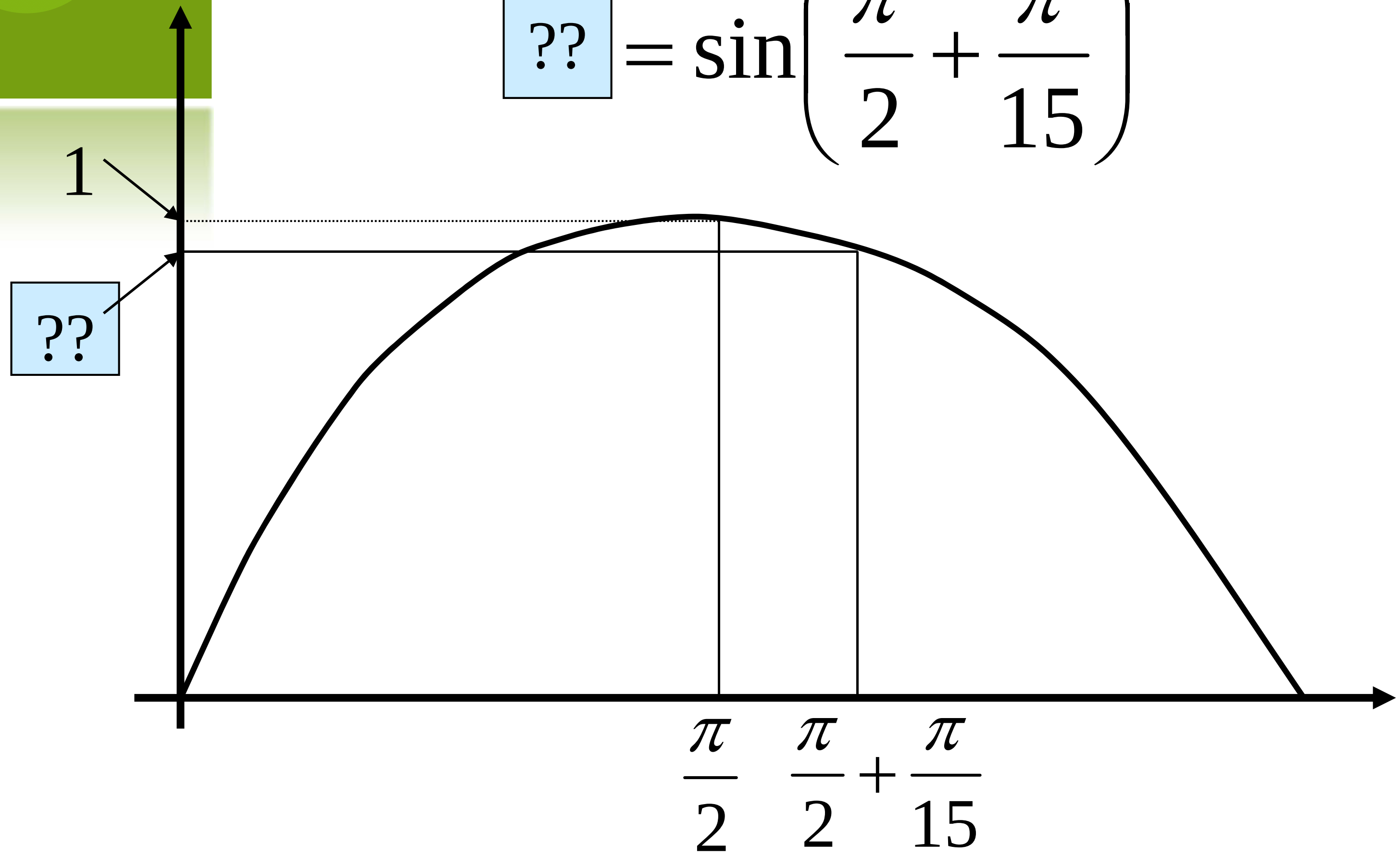
$$f(x)=\sin x \quad \text{이고} \quad a=\frac{\pi}{2} \quad \text{이고} \quad x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{15}$$

$$\text{일 때,} \quad \sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \text{이지만} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{15}\right)=\boxed{??}$$

$f(a)$는 구하기 쉽다.

$f(x)$는 구하기 어렵다

$$\boxed{??} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{15}\right)$$



*** 매크로린전개(Maclaurin's Expansion)

(1) 테일러 전개

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

(2) 매크로린전개

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

이런 전개를 이용하면

$$a=\frac{\pi}{2},\qquad x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{15}$$ 라 놓으면

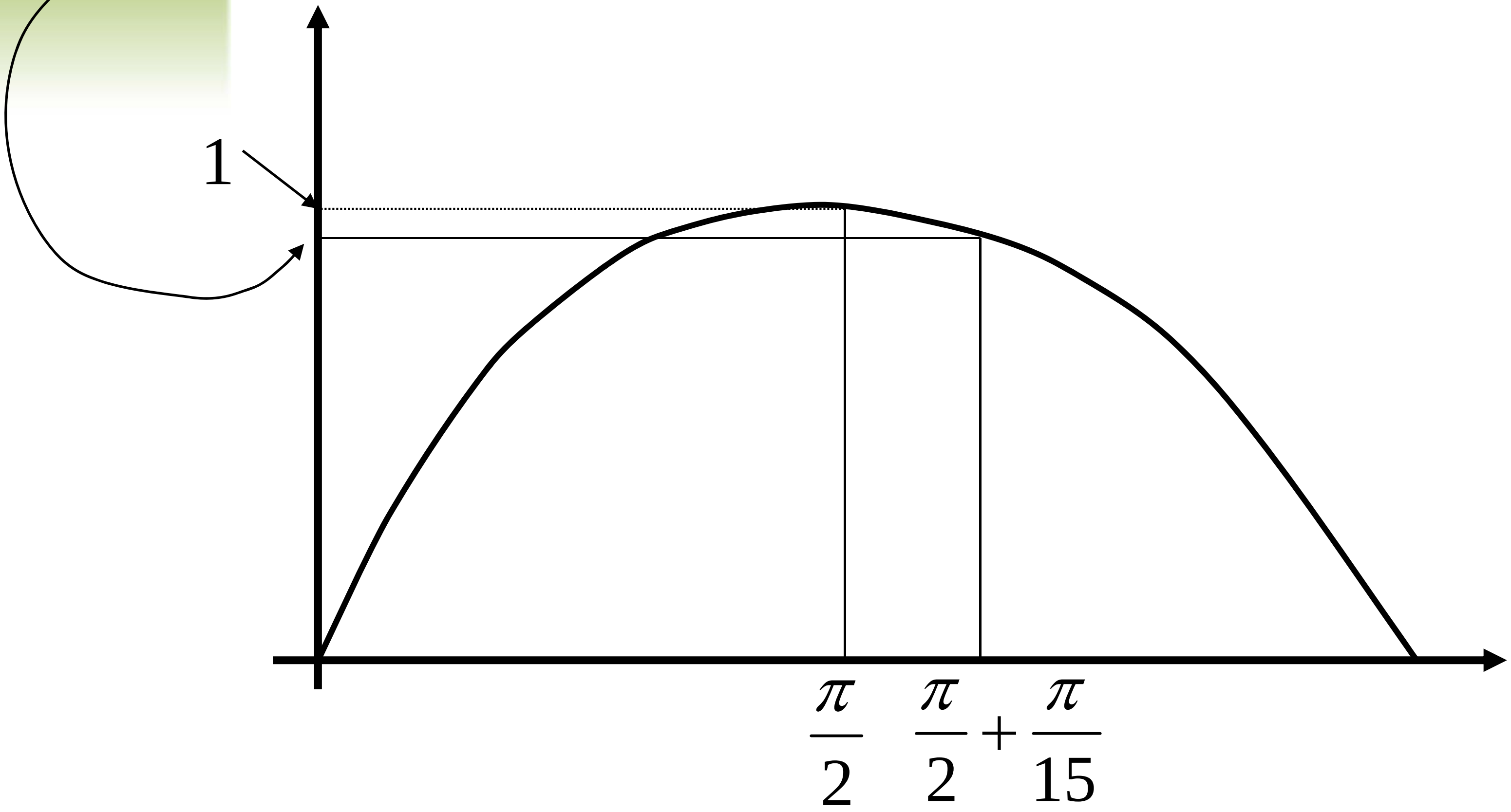
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{15}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1!}\left(\frac{\pi}{15}\right)+\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{2!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^2$$

$$+\frac{-\cos\frac{\pi}{2}}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3+\cdots$$

$$=1+0+(-\frac{1}{2})\left(\frac{\pi}{15}\right)^2+0+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^4+\cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{15}\right)^2 + 0 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^4 + \cdots \\
&= 1 + 0 - (0.02193\cdots) + 0 + (0.00008\cdots) + \cdots \\
&\cong 0.97815
\end{aligned}
$$

$$\boxed{0.97815} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{15}\right)$$



X 의 함수인 e^{tX} 에 대한 매크로린전개 (Maclaurin's expansion) 식은

$$e^{tX} = 1 + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tX)^n}{n!} + \cdots$$

와 같이 표시할 수있으므로, 다음과 같다.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= 1 + \frac{E(X)}{1!}t + \frac{E(X^2)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{E(X^n)}{n!}t^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\alpha_1}{1!}t + \frac{\alpha_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n!}t^n + \cdots$$

$M_X(t)$를 t로 1회 미분하면

$$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} E(e^{tX})$$

$$= E\left[\frac{\partial}{\partial t}(e^{tX})\right]$$

$$= E(Xe^{tX})$$

이므로 $t = 0$ 으로 두면 다음 식을 얻는다.

(1) $$\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = E(X)$$

(2) $$\frac{\partial^2 M_X(t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = E(X^2)$$

(3) $$\frac{\partial^k M_X(t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = E(X^k)$$

적률생성함수를 이용해서 평균 $E(X)$ 와 분산 $Var(X)$ 를 구할 수있다.

$$E(X) = M'_X(0)$$

$$Var(X) = M''_X(0) - [M'_X(0)]^2$$