제9주 연속확률분포모형(2)

hylee@silla.ac.kr

확률및통계(2)

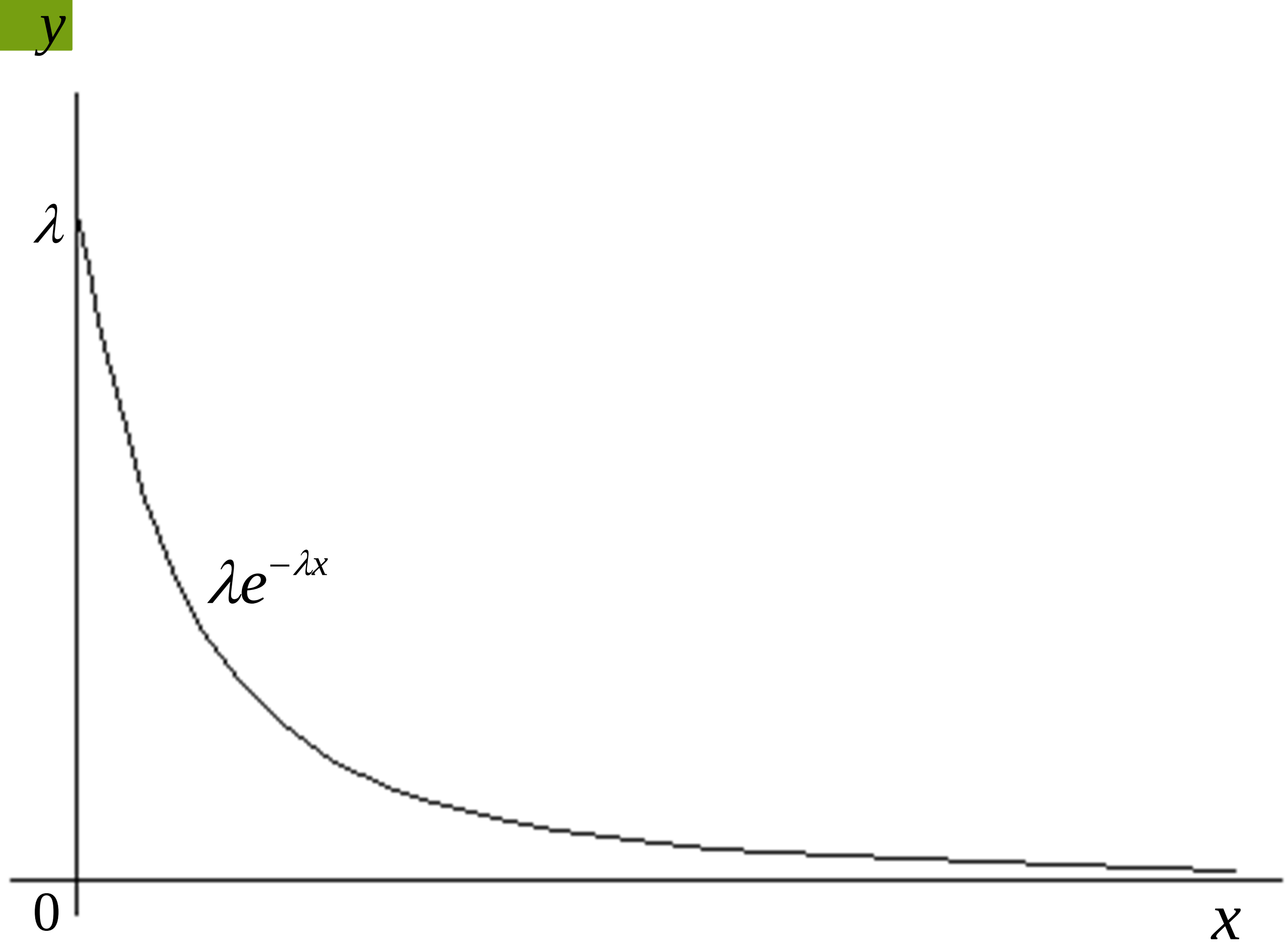
제 3절 지수분포

[정의] 지수분포

확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

로 주어질 때, X 는 모수가 λ 인 **지수분포** (exponential distribution) 를 따른다고 하고 $E(\lambda)$ 로 표기한다.



지수분포의 확률밀도함수의 그래프

예제 7

지수분포가 확률밀도함수임을 보이시오.

[풀이]

지수함수는 항상 양수값을 갖는다.

그러므로 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \geq 0, \quad (x \geq 0)$

한편,

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{T \to \infty} \left[e^{-\lambda x} \right]_0^T = 1$$

이므로, 지수분포는 확률밀도함수이다.

지수분포의 분포함수를 $F(x)$ 라하면

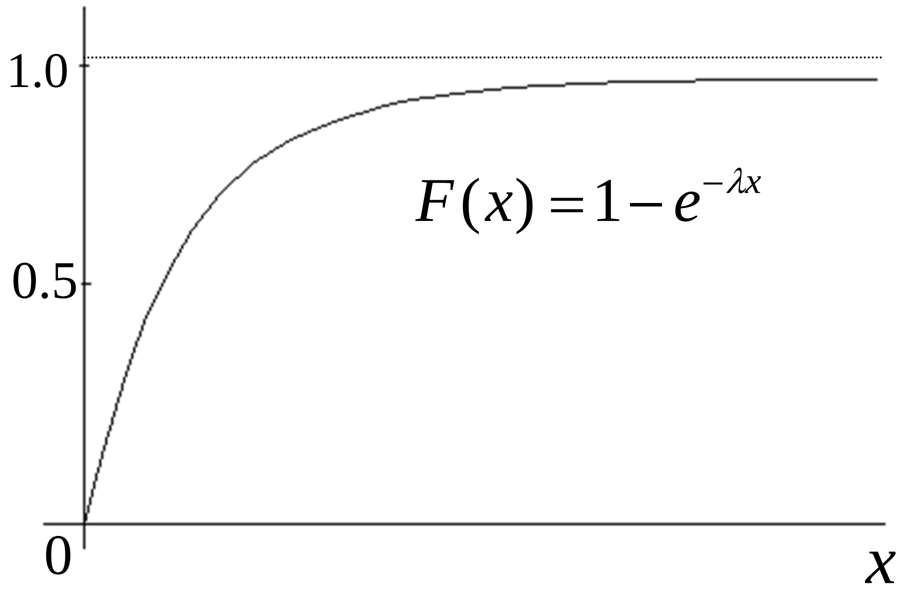
$$F(x) = P(X \le x)$$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

이므로, 다음과 같이 표현할 수있다.

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$ 이고 그래프는

$\lambda=1$ 인 지수분포의 분포함수 그래프



예제 8

전화통화시간(분)은 $\lambda = 1/10$ 인 지수분포를 한다.

(1) 10분이상 통화할 확률을 구하시오.

(2) 10분이상 20분 이하 통화할확률을 구하시오.

[풀이]

$$(1)\ \ P(X \geq 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_{10}^{\infty}$$

$$= e^{-1} = 0.368$$

$$(2)\ \ P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx$$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{10}} \right]_{10}^{20}$$

$$= e^{-1} - e^{-2} = 0.233$$

예제 9

X 가 지수분포를 할때

$P(X > x + y \mid X > x) = P(X > y)$

임을 보이시오. 이 때, 위의 성질을 만족하는 음이아닌 확률변수 X를 비기억(memoryless)이라고한다.

[풀이]

$$P(X > x+y \mid X > x) = \frac{P(X > x+y, X > x)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} = \frac{\int_{x+y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}}$$

$$= e^{-\lambda y} = P(X > y)$$

제 4절 감마분포

[정의] 감마분포

확률변수 X 가 모수 $(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$

를 가지며 다음 확률밀도함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & (x \geq 0) \\ 0 & (\mathrm{x} < 0) \end{cases}$$

을 가질 때, X 는 감마분포(gamma distribution)

를 따른다고하고 $\gamma(\alpha, \beta)$ 로표기한다.

여기서, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$

는 감마함수(gamma function)이며, 부분적분

에 의해서

$$\Gamma(\alpha)=[-e^{-x}x^{\alpha-1}]_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$$

$$=(\alpha-1)\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-2}dx$$

$$=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

α 가 정수값일 때, 예를 들면 $\alpha = n$ 이고,

위의 식에서 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ 이므로

$$
\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\
&= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&\quad \cdots\cdots \\
&= (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) \\
&= (n-1)!
\end{aligned}
$$

예제 10

감마분포가 확률밀도함수임을 보이시오.

[풀이]

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\geq 0 \quad (x\geq 0)$$

이고,

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

이므로

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy$$

에서 $y = {x}/{\beta},\ \beta > 0$ 라 놓으면

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}} e^{-x/\beta} \frac{1}{\beta} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}} e^{-x/\beta} dx$$

따라서

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

그러므로 감마분포는

확률밀도함수이다.

***

감마분포의 확률밀도함수 식에서 $\alpha = 1,\ \beta = \dfrac{1}{\lambda}$ 이면 지수분포의 확률 밀도함수와 일치한다. 즉, 지수분포는 감마분포의 특수한 경우이다.

(2) $A_1 \cap A_2 =$ 1이 첫번째, 2가 두번째 자리에 위치하는 사상이므로,

$$A_1 \cap A_2$$

$$= \{(1,2,\boxed{k_1,\cdots,k_{n-2}}) \mid k_1,\cdots,k_{n-2} = 3,\cdots,n\}$$

$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$ 이므로

구하는 확률은

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

이다.

(3) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

을 이용한다.

따라서

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2n-3}{n(n-1)}$$

(4) 어느 숫자도 제 번호에 있지 않으려면 사상은

첫번째 자리도 1 이 아니고 (즉, A_1^c),

두번째 자리도 2 가 아니고 (A_2^c),

$\cdots$,

n 번 째 자리도 n 이 아니어야 한다.

즉,

$$A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

의확률을 구하는 것이다.

그런데

$$A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$$

$$= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c$$

의확률을 구하는 것이다.

즉,

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 의 여사상을 의미한다.

그러므로 구하고자 하는 확률은

$$1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

이고,

위에서 배운 확률계산법을 이용하면,

$$
\begin{aligned}
1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\
&= 1 - \{\sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)\}
\end{aligned}
$$

이다.